

# Mathematische und physikalische Grundlagen der Astronomie II SS 2012

1. Finden Sie alle Nullstellen, Extremstellen, und Wendepunkte von  $f(x) = x^3 - 2x$ ! Charakterisieren Sie die Extremstellen!
2. Finden Sie zumindest zwei reelle Extremstellen für  $F(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ , und charakterisieren Sie diese!
3. Berechnen Sie die Jakobimatrix, und die Jakobideterminante der vektorwertigen Funktion  $T(r, \theta, \varphi)$  die eine Transformation von Kugelkoordinaten auf kartesische Koordinaten beschreibt:

$$T_1 = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$T_2 = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$T_3 = r \cos \theta$$

Ist die Ähnlichkeit der Jakobideterminante zum differentiellen Volumenelement in Kugelkoordinaten zufällig?

4. Wie lange dauert es bis die gesamte Bevölkerung Wiens (ca 1.7 Mio) dem Grippevirus ausgesetzt ist, wenn 5 Leute diesen aus dem Skiurlaub mitbringen? Setzen Sie eine exponentielle Ausbreitung an, mit der Einschränkung, dass im Mittel drei Kontakte notwendig sind, um sich anzustecken. Die Zeiteinheit sind Tage. Wie lange würde es dauern, wenn jeder Kontakt ansteckend wäre?
5. Stellen Sie die Maclaurin Reihen von  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  bis zur 6. Ordnung in  $x$  auf!
6. Versuchen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung besprochenen Methoden so viel Information wie möglich über das Verhalten der Lösungskurven folgender gewöhnlicher Differentialgleichung zu gewinnen ( $x = x(t)$ ):

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x)$$

7. Selbiges für:

$$\frac{dx}{dt} = \text{ArcCos}(x)$$

8. Zeigen Sie, dass die Lösung der logistischen Differentialgleichung

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

gleich

$$P(t) = \frac{KP_0 e^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)}$$

$P(t)$  ist hierbei die Zeitabhängige Population,  $r, K$  sind Konstanten, und  $P(0) = P_0$  die Anfangspopulation. *Tipp:* Verwenden Sie Trennung der Variablen sowie eine Partialbruchzerlegung vor der Integration. Dies sollte Ihnen die Aufgabe erleichtern.

9. Versuchen Sie maximale Information über Lösungskurven folgendes Differentialgleichungssystems zu erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a + x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -y^2 - a\end{aligned}$$

$a$  ist hierbei ein Parameter,  $x = x(t), y = y(t)$ .

10. Sie seien Bewohner eines von zwei erdgleichen Planeten  $m_1 = 1.1M_{\oplus}, m_2 = 0.9M_{\oplus}$  eines extrasolaren Planetensystems. Ihr Zentralgestirn ist ein G2V Stern (Masse =  $1 M_{\odot}$ ) und die zwei Planeten bewegen sich auf annähernd kreisförmigen Bahnen in Abständen von  $a_1 = 0.84AU$  und  $a_2 = 1.67AU$  ums gemeinsame Baryzentrum, welches praktisch mit dem Massenmittelpunkt des Sterns identisch ist. Die Planeten sind klein genug um ihre gegenseitige Anziehungskraft vernachlässigen zu können. Wie das Leben so spielt sind beide Planeten bewohnt, und aufgrund von unterschiedlichen Überzeugungen in puncto Klimapolitik verfeindet. Wie müssen Sie den Bahnradius Ihres Planeten (übrigens der innere der beiden) verändern, damit genug Energie frei wird, um Ihre Nachbarn ins Unendliche zu befördern? Natürlich muss die Energieerhaltung in Ihrem System gelten! Überprüfen Sie dies!

*Tipp:* Verwenden Sie entweder den Zusammenhang zwischen Zentrifugal- und Zentripetalbeschleunigung oder das 3. Kepler'sche Gesetz zur Berechnung der Bahngeschwindigkeiten.

Die Masse der Erde beträgt ca.  $3 \cdot 10^{-6} M_{\odot}$ .

11. Wie sieht es im obigen Problem mit der Drehimpulserhaltung aus? Welcher Zusammenhang besteht zwischen Kinetischer und Potentieller Energie eines Planetenorbits?
12. Die so genannte 'freie Raketengleichung' ist eine direkte Konsequenz des korrekt formulierten 1. Newtonschen Axioms:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = 0$$

Hierbei ist  $p(t) = m(t)v(t)$  der Impuls der Rakete. Da auf die Rakete keine äußeren Kräfte wirken (also auch nicht die Erdanziehung), ist  $\frac{dp}{dt} = 0$ . Unter der Annahme, dass die Ausströmgeschwindigkeit  $v_e$  der Antriebsmasse konstant ist, lässt sich die Gleichung wie folgt umformen:

$$v_e \frac{dm}{dt} = -m \frac{dv(t)}{dt}$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung, und berechnen Sie, wie groß die Ausströmgeschwindigkeit  $v_e$  sein muss, um eine Rakete von 10 Tonnen von  $v_0 = 0 \text{ km/s}$  auf Fluchtgeschwindigkeit ( $\simeq 11 \text{ km/s}$ ) zu beschleunigen. Beachten Sie, dass höchstens 9 von den 10 Tonnen Treibstoff sein dürfen!

13. Jetzt mal im Ernst: eine Rakete auf Fluchtgeschwindigkeit zu beschleunigen ohne die Erdanziehungskraft zu berücksichtigen ist selbst für Physiker etwas gewagt. Lösen Sie die Raketengleichung in einem konstanten Gravitationsfeld!

$$\frac{dp}{dt} = F$$

Hierbei ist  $p(t) = m(t)v(t)$  der Impuls der Rakete, und  $F = -m(t)g_E$  die Gravitationskraft auf die Rakete wirkt, wobei  $g_E = 9.81 \text{ m/s}^2$  die (konstante) Erdbeschleunigung am Äquator darstellt. *Tipp*: Benutzen Sie den selben Trick wie im vorigen Beispiel: eine konstante Ausströmgeschwindigkeit sodass  $\frac{dm}{dt} = -v_e!$  Ist das erzielbare  $\Delta v = v - v_0$  nun ebenfalls  $11 \text{ km/s}$ , wenn die gesamte Brenndauer (Zeit in der  $m_0 = 10$  Tonnen auf  $m(T) = 1$  Tonne sinkt) ca.  $T = 600$  Sekunden beträgt?

14. Wie kommt man überhaupt auf die Fluchtgeschwindigkeit? Wie hoch wäre diese am Jupiter ( $m_J = 1.8986 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ ,  $r_J = 69911 \text{ km}$ )? Wie hoch ist sie am Mond ( $m_M = 7.3477 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ ,  $r_M = 1737 \text{ km}$ )?
15. Wie viel Energie benötigen Sie um einen Satelliten aus dem LEO (Low Earth Orbit) ca. 350 km über dem Erdboden in einen geostationären Orbit 35,786 km über dem Erdboden über einen so genannten 'Hohmann Transfer' (Abb. 1) zu befördern? Bei einem Hohmann Transfer wird durch einen kurzen Impuls zunächst die niedrigere Kreisbahn auf eine exzentrische Bahn erweitert deren Perigäum genau mit der Halbachse der Kreisbahn übereinstimmt. Das Apogäum der 'Übergangsbahn' sollte wiederum mit der Halbachse der neuen Kreisbahn übereinstimmen.
16. Leiten Sie die nötigen  $\Delta v$  Werte für die Brennvorgänge des vorigen Beispiels ab! Benutzen Sie dafür zum Einen die Orbitalgeschwindigkeiten des Satelliten auf beiden Bahnen, und zum Anderen die 'Vis-Viva' Gleichung für Testkörper:

$$v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

wobei  $G$  die Newtonsche Gravitationskonstante,  $M$  die Masse des Zentralkörpers,  $r$  der jeweilige Abstand des Testkörpers zum Brennpunkt seiner Bahn, und  $a$  die Halbachse der Bahn darstellen.

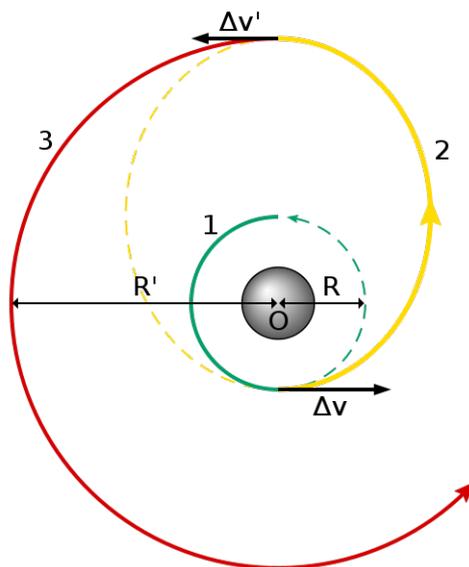


Abbildung 1: Hohmann Transfer

17. Berechnen Sie die Kepler'schen Bahnelemente des Halley'schen Kometen aus dessen heliozentrischen Koordinaten [AU] und Geschwindigkeiten [AU/D] für den 23.03.2012! Nehmen Sie dazu an, dass der Komet verglichen mit der Sonne praktisch masselos ist.

$$\vec{r} = (-2.03E + 01, 2.42E + 01, -9.58E + 00)$$

$$\vec{v} = (-2.21E - 04, 1.13E - 03, -2.45E - 04)$$

18. Ermitteln Sie die heliozentrischen Koordinaten und Geschwindigkeiten für den Halley'schen Kometen für den 23.03.2013! Die Bahn des Kometen um die Sonne bleibt dabei in guter Näherung konstant.
19. Verwenden Sie die Maxwellgleichungen, um daraus die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen im Vakuum herzuleiten:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E = 0$$

(Hinweis:  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ )

20. Ein mathematisches Pendel mit der Masse  $m$  sei der Schwerebeschleunigung  $g$  unterzogen (Abb. 2). Versuchen Sie die Bewegungsgleichungen in den kartesischen Koordinaten  $x$  und  $z$  aufzustellen.
21. Das mathematische Pendel, once again. Bestimmen Sie geeignete generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Lagrangeformalismus auf. Lösen Sie diese unter der Annahme, dass etwaige Winkelfunktionen wie der Sinus, der in Ihrer Gleichung vorkommen sollte, für kleine Argumente durch das Argument selbst ersetzt werden kann.

$$x \ll 1: \sin(x) \approx x$$

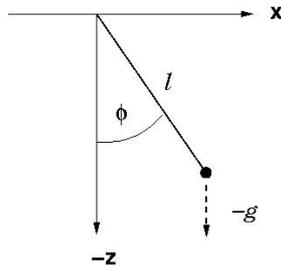


Abbildung 2: Das mathematische Pendel.

22. Direkt hinter zwei Zäunen orthogonal angrenzender Grundstücke bewegen sich Wachhunde (siehe Abb. 3). Diese sind gut erzogen und wollen den Besitz verteidigen, sprich ihr 'Wachhundpotential' steigt mit der Entfernung von der Grundstücksgrenze (dem Koordinatenursprung) linear an. Die Hunde sind jedoch nicht die mutigsten, und so bleibt ihr relativer Abstand  $d$  immer gleich groß. Führen Sie (eine) verallgemeinerte Koordinate(n) ein, und reduzieren Sie somit die Freiheitsgrade des Systems! Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems und lösen Sie diese wenn möglich!

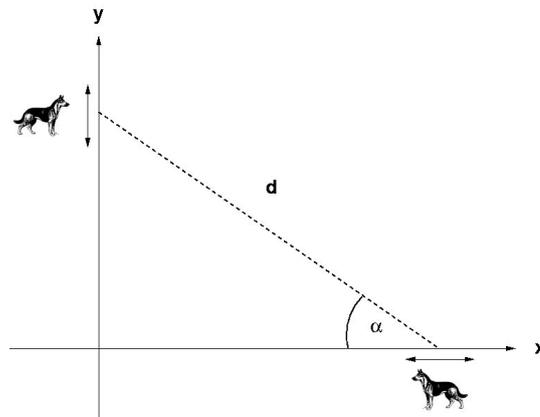


Abbildung 3: Zwei Wachhunde können sich nur direkt am Zaun entlang bewegen.

23. Ein harmonischer Oszillator mit Federkonstante  $k$  schwinde munter vor sich hin. Die einzige Kraft die auf ihn wirkt sei die Rückstellkraft. Sie wächst proportional mit der Auslenkung (Proportionalitätskonstante =  $k$ ) und zeigt in Richtung des Koordinatenursprunges. Fertigen Sie eine Skizze an! Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Stellen Sie die Bewegungsgleichungen im Lagrange- UND im Hamiltonformalismus auf, und lösen Sie diese!
24. Erstellen Sie ein Phasenraumdiagramm des harmonischen Oszillators für das Zeitintervall  $t \in [0, \infty)$  mit drei Phasenraumkurven (Trajektorien) die

folgende Anfangswerte besitzen:

	$x(t = 0)$	$\dot{x}(t = 0)$
a	1	0
b	0	2
c	1	1

Zeichnen Sie auch die 'Bewegungsrichtung' der Trajektorien ein. Welche Kurve würde ein Beobachter sehen, der nur die Position, nicht aber die Geschwindigkeit messen könnte? Welche Gesamtenergien können den Trajektorien zugeordnet werden? Welche Größe bleibt während des Durchlaufes einer Trajektorie konstant?

25. Wie in der Vorlesung besprochen sind Phasenraumdiagramme eine äußerst effektive Methode um dynamische Eigenschaften eines Systems zu erkennen, und folgende Fragen beantworten zu können: Kann ein System verschiedene Bewegungszustände einnehmen, wie z.B. Libration oder Rotation? Ist chaotisches Verhalten in diesem System möglich? Erstellen Sie das Phasenraumdiagramm des mathematischen Pendels! Untersuchen Sie dieses, und das Phasenraumdiagramm des harmonischen Oszillators auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten. Versuchen Sie auch die Grenzkurve der zwei Bewegungsmodi des Pendels, die sogenannte *Separatrix* zu bestimmen und ihr eine Energie zuzuordnen!
26. Gilt die Erhaltung der Gesamtenergie für den harmonischen Oszillator und das mathematische Pendel? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch! Wie würde eine Phasenraumkurve eines Systems aussehen, in dem Energie verloren geht?
27. Betrachten Sie, wie in der VO besprochen, eine Hantel deren Masse  $m_1$  auf der  $x$ -Achse reibungsfrei gleiten kann. Die zweite Masse  $m_2$  ist durch ein masseloses Seil der Länge  $l$  mit  $m_1$  so verbunden, dass  $m_2$  ein Pendel darstellen würde, wenn  $m_1$  eine fixe Position hätte. Drücken Sie die Geschwindigkeiten durch die kanonischen (generalisierten) Impulse aus und bestimmen Sie die Bewegungsgleichung aus der Hamiltonfunktion (ist die Energie des Systems erhalten?! Die Anfangsbedingungen lauten:  $(x_1 = y_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = l, \dot{\phi}^2 = \omega_0)$   
Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Fall kleiner Schwingungen (d.h.  $\|\phi\| \ll 1$ )!
28. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für das Doppelpendel mit Masse  $m_1$  und  $m_2$ , sowie den Stablängen  $L_1$  und  $L_2$  her (Abb. 4)!
29. Erklären Sie die Unvereinbarkeit des von Einstein verstandenen photoelektrischen Effekts mit der klassischen Mechanik!
30. Beschreiben Sie das Franck-Hertz Experiment! Welche Ergebnisse müsste dieses Experiment laut klassischer Mechanik liefern?
31. Gegeben sind He - Atome mit verschiedenen mittleren kinetischen Energien  $= E_{kin} = 0.05 \text{ eV}; 1 \text{ eV}; 10^4 \text{ eV}$ . Berechnen Sie die de - Broglie - Wellenlängen und geben Sie diese in Einheiten von Angström an!

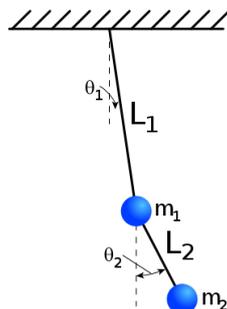


Abbildung 4: Doppelpendel

32. Elektronen werden durch eine Spannung  $U$  auf die Geschwindigkeit  $v \ll c$  beschleunigt. Berechnen Sie die zugehörigen de - Broglie - Wellenlängen!  $U_1 = 10 \text{ V}$ ,  $U_2 = 100 \text{ V}$ ,  $U_3 = 1000 \text{ V}$ ,  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}$ . Ist die Annahme  $v \ll c$  gerechtfertigt?
33. Wir nehmen an, dass Elektronen in einem Elektronenmikroskop die Energie  $E_{kin} = 10^5 \text{ eV}$  haben! Berechnen Sie die beugungsbedingte Auflösungsgrenze ( $\Delta x \geq \lambda/2$ )! Um wieviele Größenordnungen ist sie geringer als jene von Licht bei  $450 \text{ nm}$ ?
34. Die Solarkonstante, i.e. die Sonneneinstrahlung die an der Erde ankommt hat einen ungefähren Wert von  $1360 \text{ W/m}^2$ . Berechnen Sie die Anzahl der Photonen die pro Sekunde durch ihre Pupille strömt, wenn deren Durchmesser ca.  $1 \text{ cm}^2$  und die mittlere Wellenlänge  $600 \text{ nm}$  beträgt.
35. Berechnen Sie die Wellenlängenänderung des Photons bei der Comptonstreuung wenn der Streuwinkel  $\phi = 45^\circ$  beträgt. Berechnen Sie Photonenenergie vor und nach dem Stoß!
36. Eine elektromagnetische Welle mit  $\lambda = 450 \text{ nm}$  wird an einem  $e^-$  gestreut! die gestreute Wellenlänge beträgt  $450.00087 \text{ nm}$ ! Wie groß ist der Streuwinkel?
37. Berechnen Sie die ersten 4 Energieniveaus eines Teilchens im unendlich hohen 1-D Kastenpotential in SI-Einheiten! Die Länge des Kastens beträgt  $L = 10^{-9} \text{ m}$ . Die Masse  $m$  des Teilchens sei eine Elektronenmasse. Erstellen Sie auch eine Übersicht welche Wellenlänge Photonen hätten wenn alle möglichen Energieübergänge in Form von Emissionen verwirklicht werden.
38. Berechnen Sie die Kommutatoren  $[\hat{x}, \hat{p}]$ ,  $[\hat{H}, \hat{p}]$ , und  $[\hat{H}, \hat{x}]$ , wobei  $\hat{x}, \hat{p}$  wiederum Orts- und Impuls- und  $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + \hat{x}^2$  den Hamiltonoperator des quantenmechanischen Harmonischen Oszillators darstellen. Interpretieren Sie ihre Ergebnisse!
39. Berechnen Sie den Erwartungswert des (radialsymmetrischen) Ortsoperators  $\langle r \rangle$  für das  $1s$  Orbital des Wasserstoffatoms  $\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi b^3}} e^{-r/b}$ ,

mit  $b = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e \cdot q_e^2} \cdot \epsilon_0 \simeq 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C}{V \cdot m}$  stellt hierbei die Vakuumpermiabilitätskonstante,  $m_e \simeq 9.1 \times 10^{-31} kg$  die Elektronenmasse und  $q_e \simeq 1.6 \cdot 10^{-19} C$  die Elementarladung dar. Ist die Wellenfunktion normiert?  
*Achtung:* Sie rechnen in Polar-Koordinaten! Bedenken Sie Form von Volumsintegralen! Benutzen Sie die Relation  $\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = n!/a^{n+1}$  für  $n \in \mathbb{N}$  um das Integral zu lösen!

40. Auch der klassische Drehimpuls  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  hat sein quantenmechanisches Pendant. Ersetzen Sie die klassischen Größen durch die entsprechenden quantenmechanischen Operatoren und berechnen Sie die Kommutatoren  $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ ,  $[\hat{L}_x, \hat{L}_z]$ , und  $[\hat{L}_y, \hat{L}_z]$ ! Was bedeuten Ihre Ergebnisse für die Beobachtbarkeit des Drehimpulses?
41. Kommutiert  $\hat{L}^2$  mit den Drehimpulsoperatorkomponenten  $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ ? Welche Konsequenzen haben die Ergebnisse für Ihre physikalischen Messgrößen?
42. In der Physik gilt es nicht gerade als 'good practice' nur den Mittelwert/Erwartungswert einer Messung anzugeben, da damit Information über die zugrunde liegende Verteilung verloren geht. Daher gibt es auch in der Quantenmechanik ein Pendant zur Varianz (Quadrat der Standardabweichung:  $\sigma^2$ ), kreativer Weise 'Schwankungsquadrat' genannt.

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

wobei  $A$  wiederum einen hermite'schen Operator darstellt. Zeigen Sie, dass der  $L_z$  Operator im Wasserstoffatom scharf gemessen werden kann, d.h.  $\Delta L_z = 0$ ! *Tipp:*  $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ; durch den Produktansatz lässt sich der  $\phi$  abhängige Teil der Wellenfunktion  $\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$  so darstellen:  $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$ , wobei  $m$  die Magnetquantenzahl darstellt.

$n$	$l$	$m$	Eigenfunktionen $\psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi)$
1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$
2	0	0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right) e^{-Zr/2a_0}$
2	1	0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0} \cos \vartheta$
2	1	$\pm 1$	$\frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$

Abbildung 5: Eigenfunktionen der stationären Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms.

43. Berechnen Sie die Energieerwartungswerte der untersten zwei (entarteten ?) Energieniveaus im Wasserstoffatom in Einheiten von  $eV$ ! *Tipp:* Benützen Sie die stationäre Schrödingergleichung  $-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi + V(r)\psi = E\psi$  mit reduzierter Masse  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , und  $V(r)$  gleich dem Coulomb Potential  $V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ ,  $Z = +1$ ,  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ ,  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C}{V \cdot m}$ ,

$$m_1 = 938.272 \text{ MeV}/c^2, m_2 = 0.5109989 \text{ MeV}/c^2, a_0 = -\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}.$$

Die den Energiewerten entsprechenden Eigenfunktionen entnehmen Sie Abbildung 5!

44. Zeigen Sie, dass die Kugelflächenfunktionen  $Y_{2,0}(\theta, \phi)$  und  $Y_{2,1}(\theta, \phi)$  Eigenfunktionen der Operatoren  $\hat{L}_z$  und  $\hat{L}^2$  sind.

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_{l,m}(\cos(\theta)) e^{im\phi}$$

Die 'Assoziierten Legendre Polynome'  $P_{l,m}(x)$  können aus den bereits bekannten Legendre Polynomen über folgende Relation gewonnen werden:

$$\begin{aligned} P_{l,m}(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \\ &= (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2-1)^l \end{aligned}$$

wobei die Indices  $l$  und  $m$  als Drehimpuls und Magnetquantenzahl interpretiert werden können. Daher gilt  $-l \leq m \leq l$ . *Tipp: Ignorieren Sie den Radialanteil der Drehimpulsfunktionen! Zeigen Sie schlicht, dass  $\hat{L}^2 Y = \text{const} \cdot Y$  - selbiges für  $\hat{L}_z$*