Übungen aus den numerischen Methoden der Astronomie SS 2012

1. *Integer I*:
   Berechnen Sie die Fläche eines rechtwinkeligen Dreiecks mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes. Die beiden Katheten, bzw. eine Kathete und eine Hypotenuse sollen im Terminal eingebbar sein. Das Ergebnis wird am Terminal ausgegeben. Welchen Unterschied könne Sie erkennen, wenn sie ausschließlich Variablen vom Typ 'integer' oder 'real' für die Rechnung verwenden? Macht beides Sinn?

2. *Integer II*:
   Ist 283 eine Primzahl? Wie stehts mit 9341 und 76359?
   Tipp: Sie können Ihre Vermutungen mit Hilfe der 'brute force' Methode beweisen, indem Sie alle ganzzahligen Teiler automatisch durchprobieren.

3. *Password-Protection Program Teil I*:
   Erstellen Sie ein Programm, welches am Terminal nach der Eingabe ihres Namens fragt, den Namen speichert und wieder am Terminal ausgibt. Nachdem Sie ihren Namen eingeben haben, soll das Programm nach einem Passwort fragen, welches Sie vorher im Programm selbst angegeben haben. Vergleichen Sie beide Passwörter. Wenn das Passwort richtig eingegeben wurde, soll das Programm 'ok!' am Bildschirm ausgeben, ansonsten wird das Programm beendet.

4. *Password-Protection Program Teil II*:
   Es sollen drei verschiedene Passwörter drei verschiedenen Namen zugeordnet werden. Sowohl die Namen, als auch die Passwörter sollen aus Dateien extrahiert werden, bevor das Programm die Terminal Abfrage nach dem Namen und dem Passwort startet. Bei falsch eingegebenem Passwort soll die Passwortabfrage dreimal wiederholt werden. Bei der vierten Fehleingabe stoppt das Program.

5. *Verschiedenes Teil I*: Erstellen Sie Flussdiagramme (flowcharts) all ihrer Programme sowie ein Flussdiagramm des Simplex Algorithmus.

6. *Verschiedenes Teil II*: Schreiben Sie ein Programm zur Lösung linearer Gleichungssysteme nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren, das Sie in der linearen Algebra studiert haben (sollten). Minimale Anfroderungen sind die Lösung dreier Gleichungen in drei Unbekannten. Der Unbekannten-Vektor, sowie die Koeffizientenmatrix sollen aus Eingabe-Dateien entnommen werden.

7. Es sei das Potential eines 'verrückten' Harmonischen Oszillators in 2 Dimensionen gegeben:

$$\Omega(x, y) = x^2 + (y - 3)^2$$

Finden sie das (hier triviale) Minimum von Ω. Berechnen Sie 5 Durchläufe des Simplexalgorithmus mit den Startpunkten:

$$A = (2, 3)\ B = (3, 2)\ C = (-2, 1)$$

und den folgenden Parameterwerten:

$$\alpha = 1\ \beta = 0.5\ \gamma = 2\ \delta = 0.5$$

8. Bestimmen Sie den analytischen Ausdruck für den Gradienten des Potentials $\Omega(x, y)$ aus dem vorigen Beispiel! Folgt der Schwerpunkt des Simplex dem Gradienten des Potentials?

9. Da der Parameterraum eines Simplex beliebig gewählt werden kann, stellt die Ausgleichsrechnung ein weiteres Anwendungsgebiet des Downhill-Algorithmus dar. Ihre Messreihe liefert folgende Ergebnisse (die Unsicherheit liegt unter $\pm 10^{-4}$):

i	x_i	y_i
1	0.1	1.1897
2	0.5	1.7376
3	2.5	1.1988
4	3.0	0.2823

Aus der Theorie wissen Sie, dass Ihre gesuchte (höchst nichtlineare) Funktion folgende Form haben muss:

$$y(x) = a \cdot Sin(x) + e^{b \cdot x^2}$$

Bestimmen Sie die Parameter a und b mit 3 Simplex-Iterationsschritten! Ihre Startwerte schätzen Sie dabei wie folgt:

a_1=0	b_1=0
a_2=1.5	b_2=-2
a_3=-0.5	b_3=0.5

Die Parameter für α, β, γ und δ können Sie aus dem vorigen Beispiel übernehmen.
Tipp: Eine Ausgleichsrechnung basiert auf der Minimierung der Fehlerquadratsumme $\sum_i [y_i - y(x_i, a_i, b_i)]^2$.

10. Diskussion Operator 1: Was ist ein Operator? Nennen Sie einige Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Operatoren, Funktionen und Funktionalen.

11. Diskussion Operator 2: Die in der Vorlesung definierten Verschiebungs- und Differenzenoperatoren τ, Δ und ∇ sind lineare Operatoren. Welche Eigenschaften definieren Linearität? Nennen Sie Beispiele für lineare und nichtlineare Operatoren. Warum glauben Sie, haben lineare Operatoren eine derart große Bedeutung in der Physik?

12. Gregory-Newton Interpolation mit äquidistanten Stützstellen. Tabellieren Sie die Funktion $y = \cos(x)$ für die Werte $x = 1, 2, 3, 4$. Erstellen Sie ein Differenzenschema und ermitteln Sie alle möglichen Interpolationspolynome ausgehend von der Stützstelle $x_0 = 1$ nach der Formel:

$$p_n(x) = y_0 + \frac{\Delta^1 y_0 (x - x_0)}{1!h} + \frac{\Delta^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1)}{2!h^2} + ... + \frac{\Delta^n y_0 (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})}{n!h^n}$$

wobei h den konstanten Abstand der Stützstellen, n die Ordnung des Interpolationspolynoms, x_n die Stützstellen, und $\Delta^n y_0$ die in der Vorlesung definierten Vorwätsdifferenzen des Funktionswertes y_0 am Stützpunkt x_0 angeben. Welcher Ordnung kann ein Interpolationspolynom höchstens haben, wenn m Stützstellen zur Verfügung stehen?

13. Verwenden Sie die Interpolationspolynome aus dem vorhergehenden Beispiel und berechen Sie damit die Werte der interpolierten Funktion bei $x = \pi$. Berechnen Sie die prozentuelle Abweichung der einzelnen Ergebnisse, vom tatsächlichen Wert $y = \cos(\pi)$. Steigt die Genauigkeit bei steigender Ordnung der Polynome? Skizzieren sie die Polynome im Bereich von $x \in [0, 2\pi]$!

14. Extrapolation: Verwenden Sie die Interpolationspolynome um die Funktionswerte bei $x = 6$ und $x = 9$ zu berechnen (extrapolieren), und bestimmen Sie erneut die prozentuelle Abweichung an diesen Punkten. Wie verhält sich die Abweichung nun mit zunehmender Ordnung? Benutzen Sie zur Kontrolle ebenso die in der Vorlesung präsentierte Formel $f(a+n \cdot h) = ...$ um die Funktionswerte direkt (ohne explizite Erstellung eines Interpolationspolynoms) zu erhalten. Skizzieren sie die Polynome im Bereich von $x \in [0, 4\pi]$.

15. Bestimmen Sie den Funktionswert an der Stelle $x = 1.5$ via Spline Interpolation!

Ihre Messwerte y_i an den Stellen x_i lauten wie folgt:

i	x_i	y_i
1	-1.5	-2.23
2	-0.3	0.07
3	0.4	0.11
4	1.0	-0.42
5	1.8	-2.91
6	2.2	-1.49

Benützen Sie die Randbedingungen $y_1'' = 5.24$,$y_6'' = 22.08$.

16. Betrachten Sie die beiliegende Tabelle von x und y Positionen der Erde. Berechnen Sie die Beschleunigungen $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$ am 30. Tag und bestimmen Sie damit die Gauß'sche Gravitationskonstante k über das Newton'sche Gravitationsgesetz!

17. Versuchen Sie selbiges via Splines - verwenden Sie die angegebenen Geschwindigkeiten als Randbedingungen!

18. Extrapolieren Sie die Position der Erde am 90. Tag!

19. Lösen Sie die Differentialgleichung für das mathematische Pendel mit Hilfe der Lie-Reihen bis zur fünften Ordnung in t!

$$\ddot{\Phi} = Sin(\Phi)$$

Tipp: Spalten Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung in $\xi = \Phi$ und $\eta = \dot{\Phi}$. Da keine Anfangsbedingungen angegeben sind, erstellen Sie einfach die Lie-Reihen für Orte und Geschwindigkeiten bis zur fünften Ordnung in t.

20. Wenden Sie die Methode der Lie-Reihen auf das Problem des freien Falls unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes an!

$$\ddot{h} = -g + q \cdot \dot{h}^2$$

Erstellen Sie die Lie-Reihe bis zur fünften Ordnung in t mit folgenden Anfangsbedingungen:

$$h_0 = z$$
$$\dot{h}_0 = v_0 = 0$$

21. Berechnen Sie die ersten drei Lie-Reihen Terme des gekoppelten Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung:

$$\ddot{x} = -x - 3x^2 y$$
$$\ddot{y} = -y - x + y^3$$

22. Berechnen Sie den Unterschied in der Beschleunigung des Merkur, wenn Sie die rotationsbedingte Abplattung der Sonne in erster Näherung (Potential $U \simeq \sum_{i=0}^{2} U_i$) inkludieren oder vernachlässigen!
Merkur hat eine Bahn-Halbachse von ca. 0.387 AU und eine numerische Exzentrizität von $e \simeq 0.2$. Betrachten Sie jenen Bahnpunkt, an dem der Unterschied am deutlichsten ist!
Tipp 1: Nähern Sie die Sonne als homogenes Rotationsellipsoid mit den Halbachsen a, b, c; $\quad a = b = 695500km$ und einer Abplattung $\alpha = \frac{a-c}{a}$ von $9 \cdot 10^{-6}$, sprich sie erscheint orthogonal zur Ekliptik etwas gestaucht.
Tipp 2: Die relevanten Trägheitsmomente eines homogenen Rotationsellipsoides sind: $A = \frac{1}{5} \cdot M \cdot (a^2 + c^2)$, $\ C = \frac{1}{5} \cdot M \cdot (a^2 + b^2)$ Für eine schöne Herleitung dieser Relationen coram publico gibts eine Tafelmeldung!

23. Ermitteln Sie die Beschleunigung der Erde durch die Sonne, und bestimmen Sie ihre mittlere Bahngeschwindigkeit!
Tipp: Wie war das mit Zentrifugal- und Zentripedalbeschleunigung nochmal...?

24. Hätte Vega einen terrestrischen Planeten in Erddistanz, würde es die 'Veganer' schwer haben. Zum Einen wäre es relativ warm, zum Anderen würden sie gerne die Bahngeschwindigkeit ihres Planeten berechnen - leider kennen sie aber nur ein kugelsymmetrisches Gravitationspotential... Wie falsch liegen die Außerirdischen? Geben Sie den Fehler in % relativ zur wahren Bahngeschwindigkeit an. Vega hat durch seine schnelle Rotation folgende Halbachsen: $a = b = 2.78R_\odot$, und $c = 2.26R_\odot$. Die Masse Vegas: $2.135M_\odot$.

25. Führen Sie für die Funktion:

$$f(T) = (1/4 + T^3)^{-3/2}$$

mit der Taylorreihendarstellung

$$f(T) = 8 - 48T^3 + 240T^6 - 1120T^9 + O(T^{10})$$

eine Padé Approximation bis zur Ordnung ($m = n = 3$) durch! Vergleichen Sie Taylor und Padé Approximation mit der Original-Funktion!