Numerische Methoden der Astronomie SS 2012 Programmierbeispiele I und II - Max Planck und der Sonnenbrand

Siegfried Eggl

1 Aufgabenübersicht

1.1 Beispiel I

Ermitteln Sie die Wellenlänge bzw. Frequenz des Maximums der Planck'schen Strahlungskurven, genauer gesagt, der spektralen spezifischen Ausstrahlungen $\mathrm{J}_\lambda(\lambda, T)$ und $\mathrm{J}_\nu(\nu, T)$ via Simplexverfahren für Wega, Aldebaran und die Sonne.

1.2 Beispiel II

Integrieren Sie $\mathrm{J}_\lambda(\lambda, T)$ über den Wellenlängenbereich der UV Strahlung mit Hilfe eines Monte-Carlo Verfahrens, und berechnen Sie wie schnell man einen Sonnenbrand bekäme, bewegten wir uns um Wega oder Aldebaran anstatt um unsere Sonne.

2 Einführung

Als Max Planck um 1900 die Eigenschaften der Hohlraumstrahlung erklärte, und damit mehr oder minder die Quantenmechanik ins Leben rief, begannen goldene Zeiten für die Astronomie. Durch den rigoros gezeigten Zusammenhang zwischen emittierter Lichtmenge in einem bestimmten Wellenlängenbereich und der Temperatur des Strahlers war es nun möglich den Sternen tatsächliche Effektivtemperaturen zuzuordnen. Und dies ganz ohne bei dem Versuch ein geeichtes Thermometer im Stern zu plazieren ins Schwitzen kommen zu müssen! Aufgrund des großen Erfolges der Planck'schen Theorie verwundert es nicht, dass sich in den letzten hundert Jahren ein wahrer Urwald an Formulierungen des funktionalen Zusammenhanges zwischen den Größen Temperatur, Wellenlänge und Strahlungsleistung entwickelt hat. Dabei schlägelt man sich durch Begriffe wie die der *spektralen Strahldichte*, der *spektralen spezifischen Ausstrahlung* und der *Gesamtstrahldichte*, mal pro Steradians, mal in Photonen pro Sekunde pro Quadratmeter. Wer sich in diesem Dickicht noch nie verirrt hat, ist zu beneiden. Da dieses Thema zentraler in der Astronomie nicht sein könnte, werden Sie sich in diesem Übungsbeispiel zumindest mit den Grundlagen auseinander setzten dürfen.

2.1 Das Planck'sche Strahlunsgesetz

Wir befassen uns zunächst mit Abstrahlung im Allgemeinen. Dazu führen wir eine Abstrahlfunktion I ein. Stellen Sie sich eine unendlich dünne Platte einer gleichmäßig in alle Raumrichtungen abstrahlenden (=Lambert'schen) Substanz vor. Abbildung 1 sollte Ihnen dabei helfen. Um unser Modell nicht unnötig kompliziert zu gestalten, wird alle Strahlung, die von der Fläche A ausgeht, im Flächenmittelpunkt konzentriert. Wäre die Strahlung nun perfekt gebündelt - wie etwa ein LASER - würde sie als unendlich dünner Strahl in Richtung des Flächennormalenvektors N, oder unter einem bestimmten Winkel θ zu diesem Flächennormalvektor, austreten. Da unsere Annahme jedoch keinen LASER vorsieht, ist die Stahlung etwas 'aufgefächert'. Je weiter sich 'Nachbar-Stahlen' vom Zentrum der Fläche A entfernen, desto größer wird auch ihr gegenseitiger Abstand. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Strahlung ist naturgemäß die Lichtgeschwindigkeit, daher sollten alle, trotz größerem gegenseitigen Abstand, die gleiche Distanz vom Flächenzentrum von A zurückgelegt haben. Diesen Sachverhalt stellt man am bequemsten in *Kugelkoordinaten* dar. Konkret betrachtet man einen kleinen Ausschnitt einer Kugel mit Zentrum im Flächenmittelpunkt von A und Einheitsradius $r = 1$. Koordinaten auf der Oberfläche einer Kugel mit $r = 1$ können allein durch zwei Winkel - φ horizontal und θ vertikal[1] - beschrieben werden. Einen kleinen Oberflächenausschnitt der Einheitskugel, von φ bis $\varphi + d\varphi$ sowie θ bis $\theta + d\theta$, bezeichnet man - analog zum Flächenelement dA - als *Raumwinkelelement* $d\Omega$ mit 'Einheit' Steradiant[2]. Mit Hilfe von $d\Omega$ lässt sich nun die 'Auffächerung' des Lichtstrahles quantitativ beschreiben. Denken Sie etwa an den Vergleich LASER - Taschenlampe. Während der LASER nur einen relativ kleinen Bereich der Einheitskugel anstrahlt, leuchtet die Taschenlampe einen Erheblich größeren Teil der Oberfläche aus. In unserem Beispiel ist die Fläche A ein Lambert'scher Strahler, sie strahlt also in den gesamten 'Halbraum' - die Unterseite der Fläche strahlt nicht. Dies entspricht der halben Oberfläche der Einheitskugel. Da unsere Lambert'sche Abstrahlfunktion I nicht vom Raumwinkel abhängt, können wir sie über den Halbraum (HR) integrieren und erhalten:

$$\int_{HR} I \; d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I \; sin(\theta) \; d\theta \; d\varphi = 2\pi \; I \tag{1}$$

Im Unterschied zu üblichen Kugelkoordinaten wird beim *Oberflächenintegral* der Einheitskugel verständlicher Weise r ignoriert, da $r = 1$. Daher ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem Oberflächenelement einer beliebigen Kugel mit Radius R: $dS = R^2 sin(\theta) \; dR \; d\theta \; d\varphi$ und dem Oberflächenelement der Einheitskugel, dem Raumwinkelelement $d\Omega$ zu:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \tag{2}$$

Vorerst sind wir damit am Ende der Geometriestunde angelangt.

[1] Bei vertikalen Winkeln muss besonders auf die Ausrichtung geachtet werden! Konventionen sind hier unterschiedlich. Mal gilt der Flächennormalvektor N als Nulllinie von dem aus gemessen wird, mal die Fläche A!

[2] Also nicht in Grad! Genau wie Radiant ist Steradiant *keine* wirkliche, physikalische Einheit im Gegensatz zu Meter, Sekunde, etc.

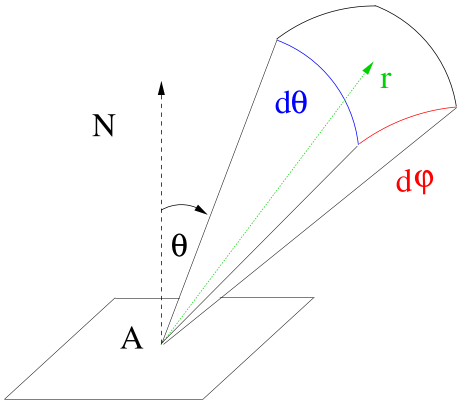

Abbildung 1: Skizze einer 'aufgefächerten' Abstrahlung der Fläche A. N bezeichnet den Flächennormalenvektor im Flächenmittelpunkt. Das Oberflächenelement dS wird zwischen den Winkelpositionen φ bis $\varphi + d\varphi$ sowie θ bis $\theta + d\theta$ einer Kugel mit Radius r aufgespannt. Für $r = 1$ enspricht $dS = d\Omega$, also dem Raumwinkelelement.

Max Planck's Beitrag war nun folgender[3]: Ein Körper, egal welcher Form, mit einer Temperatur T strahlt bei einer Wellenlänge λ nach dem Gesetz:

$$I_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \tag{3}$$

und bei einer bestimmten Frequenz ν wie:

$$I_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{4}$$

wobei I wiederum unsere Abstrahlfunktion bezeichnen soll. Wozu also der geometrische Aufwand? Wenn man's genau nimmt - und das ist in diesem Fall wichtig - ist I erst eine physikalisch verwertbare Größe wenn sie zumindest einen kleinen *Bereich* ihrer Variablen abdeckt, ansonsten wäre die abgestrahlte Energie pro Wellenlänge nämlich identisch Null[4]! Dies wird meist implizit vorausgesetzt, wir wollen es aber explizit vermerken:

$$I_\nu(\nu, T)\, \cos(\beta)\, dA\, d\nu\, d\Omega = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} - 1} \cos(\beta) dA\, d\nu\, d\Omega \tag{5}$$

$$I_\lambda(\lambda, T)\, \cos(\beta)\, dA\, d\lambda\, d\Omega = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)} - 1} \cos(\beta) dA\, d\lambda\, d\Omega \tag{6}$$

Nun können wir I_ν und I_λ als *spektrale Strahldichten* identifizieren, also als Maß für die übertragene *Energie pro Frequenz oder Wellenlänge pro Zeit pro Raumwinkel pro Quadratmeter strahlender Fläche.* What a mouthful. Naturkonstanten in diesen Gleichungen sind:

[3]Für eine Herleitung des Strahlungsgesetzes siehe etwa `http://en.wikipedia.org/wiki/Planck's_law`

[4]Dies ist leicht durch die Integration $\int_{\lambda 0}^{\lambda 0} I_\lambda(\lambda, T)\, d\lambda$ bei fixem T überprüfbar!

Vakuum Lichtgeschwindigkeit (c) [m/s]	299792458
Planck'sches Wirkungsquantum (h) [Js]	$6.62606896 \cdot 10^{-34}$
Boltzmann Konstante (k) [J/K]	$1.3806504 \cdot 10^{-23}$

Die jeweiligen SI Einheiten sind folglich für I_ν $[W\ m^{-2}\ Hz^{-1}\ str^{-1}]$ und für I_λ $[W\ m^{-3}\ str^{-1}]$.[5] Der ominöse $cos(\beta)$ Term gehört zum Flächenelemen dA und entspringt der Überlegung, dass sich die *tatsächlich strahlende* Fläche A für einen Beobachter, der die Fläche unter dem Winkel β betrachtet, kleiner erscheint. Dies erörtert Abbildung 2.

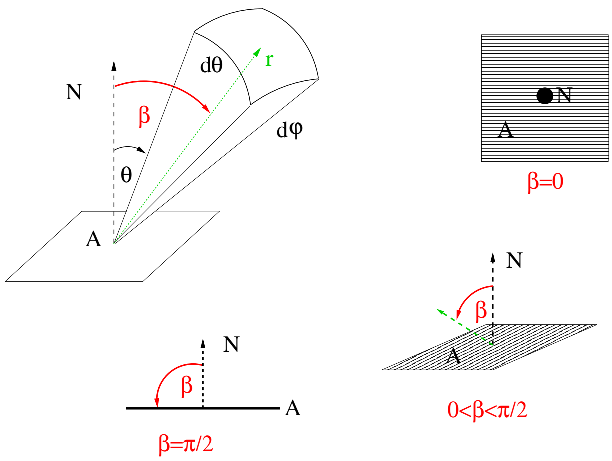

Abbildung 2: Die gesamte Abstrahlung der Fläche A, die von einem Beobachter wahrgenommen werden kann ist proportional zum Cosinus des Betrachtungswinkels β. N bezeichnet den Flächennormalenvektor im Flächenmittelpunkt. Im ungünstigsten Fall, sieht man nur den Rand der Fläche A ($\beta = \frac{\pi}{2}$).

In unserem Fall strahlt die Fläche A in alle Raumrichtungen gleichmäßig ab. Das bedeutet, es gibt keinen Grund nicht einfach über den gesamten HR zu integrieren, und zwei lästige Differenziale loszuwerden.

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_\nu(\nu,T)\,dA\,d\nu &= \int_{HR} I_\nu(\nu,T)\cos(\beta)\,dA\,d\nu\,d\Omega && (7)\\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\beta=0}^{\frac{\pi}{2}} I_\nu(\nu,T)\cos(\beta)\,dA\,d\nu\,\sin(\beta)\,d\varphi\,d\beta && (8)\\
&= 2\pi\, I_\nu(\nu,T)\,d\nu \int_{\beta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\beta)\sin(\beta)\,d\beta && (9)\\
&= \pi\, I_\nu(\nu,T)\,dA\,d\nu && (10)
\end{aligned}$$

Für $\mathrm{J}_\lambda(\lambda,T)$ erhält man einen völlig analogen Ausdruck.
J wird *spektrale spezifische Ausstrahlung* genannt.

[5] Auch hier ist Vorsicht geboten, da manchmal I_λ in $[W\ m^{-2}\ \mu m^{-1}\ str^{-1}]$ zu finden ist, oder gar als Funktion der Wellenzahl σ an Stelle der Wellenlänge definiert wird.

Zum Abschluss wollen wir noch die gesamte Abgestrahlte Leistung unserer Platte mit einer Temperatur T und Fläche von einem Quadratmeter in den HR berechnen. Hierzu integrieren wir eine spektrale Strahldichte über den gesamten HR und den gesamten Frequenzbereich:

$$\int_{HR} \int_{\nu=0}^{\infty} I_\nu(\nu, T)\ d\nu\ d\Omega = \int_{\nu=0}^{\infty} \mathrm{J}_\nu(\nu, T)\ d\nu = \sigma T^4 \tag{11}$$

mit $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = (5{,}670400 \pm 0{,}000040) \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4}$ und der glücklichen Lösung des Integrals $\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^\nu - 1}\, d\nu = \frac{\pi^4}{15}$, erhalten wir also das Stefan - Boltzmann Gesetz! Zu beachten ist noch, dass die Planck'sche Energieverteilung exakt nur für 'Schwarzkörper' gültig ist. Diese Bezeichnung umfasst Gegenstände, die alle Strahlung perfekt absorbieren und abgeben können ohne z.B. Absorptionslinien oder Ähnliches aufzuweisen. Für reale Sterne trifft diese Annahme nur bedingt zu, der Einfachheit halber werden wir in diesem Beispiel allerdings von Schwarzkörpern ausgehen.

2.2 Vega und Aldebaran

Wega ($\alpha\, Lyrae$) und Aldebaran ($\alpha\, Tauri$) gehören zu den auffälligeren Sternen am Nachthimmel. Als 'Standard-Stern' muss Wega dafür herhalten die scheinbare Helligketisskala für alle Wellenlängen auf 0 [mag] zu eichen. Wega besitzt eine sehr hohe Rotationsgeschwindigkeit: 12,5 h im Vergleich zu den etwa 25-34 Tagen für die Sonne bei doppeltem Radius, und seit 1981 gibt es die Vermutung es könnte sich bei Wega um einen schnell Pulsierenden $\delta Scuti$ Stern handeln (Fernie, 1981). Pulsationen, die Helligkeitsschwankungen mit sich führen... heute würden sich die meisten Astronomen wohl wünschen ein etwas zahmeres Exemplar für die Aufgabe des 'Standard-Sterns' gewählt zu haben. Aldebaran hingegen ist recht zahm, von seinem Riesentum abgesehen. Mit einem Durchmesser von 88 Sonnenradien würde er von der Erde aus gesehen einen Winkeldurchmesser von etwa 23° haben - sprich einen nicht unwesentlichen Himmelsausschnitt füllen. Es folgt eine Tabelle mit relevanten Daten:

	Sonne	Wega	Aldebaran
Spektral-Typ	G2V	A0V	K5III
Leuchtkraft [$L_\odot$]	1	37	518
Radius [$R_\odot$]	1	2.5	44
Effektiv Temperatur [K]	5778	9600	3900

Leuchtkräfte und Radien sind hier, wie üblich, auf die Sonne bezogen. Die effektiv Temperatur, also die Temperatur die der äquivalenten, thermischen Strahlung eines Schwarzkörpers entspricht wird dagegen einfach in Kelvin vermerkt.

2.3 Monte Carlo Integration

Als Monte Carlo (MC) Methoden gelten numerische Verfahren, die sich Eigenschaften von Zufallszahlen zunutze machen. Entwickelt um Verhaltensweisen statistischer Ensembles in der Material- und Festkörperphysik zu untersuchen wird hier vereinfacht gesagt durch geschicktes 'Probieren', z.B. Versetzen von Atomen in einem Gitter, versucht die energetisch günstigste Anordnung des gesamten Ensembles zu finden. Die Anwendungen von MC sind inzwischen jedoch so vielfältig, dass sie praktisch nur noch die Verwendung von Zufallszahlen gemein haben. Wir werden mit Hilfe von MC versuchen, die Planck'sche Strahlungskurve über den UV-Strahlungsbereich zu integrieren. Vom praktischen Standpunkt aus gesehen ist die Methode denkbar einfach: Man nehme sehr viele Paare von unabhängigen, gleichverteilten Zufallszahlen, und denke sich ein Rechteck, in das die zu integrierende Funktion eingeschrieben sein soll. Die Höhe des Rechtecks gleicht dem Funktions-Maximum im zu integrierenden Intervall, und die Breite ist das Intervall selbst (siehe Abbildung 3). Nun schießt man Paare unabhängiger Zufallszahlen, die x,y-Koordinaten von Punkten darstellen, in dieses Rechteck. Sind alle Zufallszahlen unabhängig, so gilt dass die Anzahl der Punkte die unter der zu integrierenden Funktion landen proportional zur Fläche unter dem Funktionsgraphen ist. Sprich das Integral der Funktion ist ganz einfach der Anteil der gesamt gewürfelten Punkte die unterhalb der Funktion gelandet sind, multipliziert mit der Fläche des Rechtecks:

$$\int_{\lambda_{start}}^{\lambda_{end}} \mathrm{J}_\lambda d\lambda = \frac{N_{y<\mathrm{J}_\lambda(x)}}{N_{tot}} \cdot A_\square \tag{12}$$

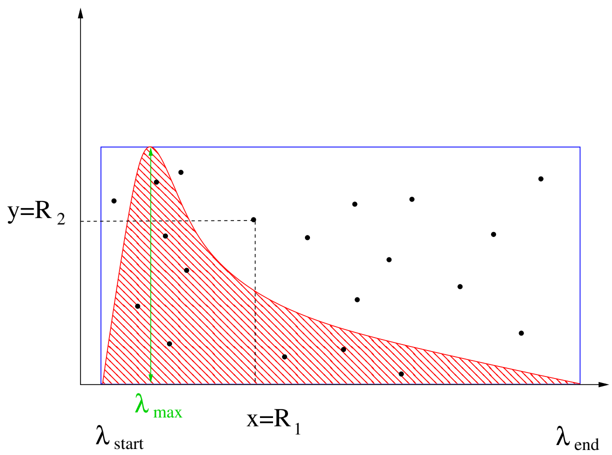

Abbildung 3: Monte Carlo Integration. Unabhängie Zufallszahlen-Paare R_1 und R_2 (schwarze Punkte) werden aus dem blauen Rechteck gewürfelt. All jene Punkte, die unterhalb die zu integrierenden Funktion (rot) fallen werden gezählt. Das Integral der Funktion ist somit gleich der Zahl der Punkte unter dem Funktionswert durch die Gesamtzahl der gewürfelten Punkte mal der Fläche des blauen Rechtecks

3 Aufgaben im Detail

3.1 Beispiel I

Verwenden Sie das in der Vorlesung besprochene Simplex Verfahren um die Wellenlänge des Maximums der Planck'schen Strahlungskurven, genauer gesagt, der spektralen spezifischen Ausstrahlungen $\mathrm{J}_\lambda(\lambda, T)$ und $\mathrm{J}_\nu(\nu, T)$ für Wega, Aldebaran und die Sonne zu berechnen. *Tipp:* Erst denken, dann programmieren! Negative Wellenlängen und Frequenzen sollten nicht vorkommen.

Bonus Aufgaben:

- Versuchen Sie mit Hilfe der Relation $\lambda \cdot \nu = c$ die Funktion I_ν in I_λ umzurechnen! *Tipp:* Vernünftiger Weise sollten das Integral über alle Frequenzen und das Integral über alle Wellenlängen das gleiche Ergebnis, nämlich das Stefan - Boltzmanngesetz liefern. (3 Punkte)
- Stellen Sie die exakten Kurven I_ν und I_λ für Wega, Aldebaran und die Sonne graphisch dar! (3 Punkte)
- Vergleichen Sie Ihre Resultate mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz $\lambda = \frac{b}{T}$, wobei $b = 2.8977685^{-3}$ [mK] die 'Wiensche Verschiebungskonstante' darstellt. (3 Punkte)

3.2 Beispiel II

Verwenden Sie das Monte Carlo Shooting Verfahren und integrieren Sie $\mathrm{J}_\lambda(\lambda, T)$ über den Wellenlängenbereich der UV Strahlung ($100 - 400$ [nm]) für Wega, Aldebaran und die Sonne. Berechnen Sie wie rasch man durch Wega bzw. Aldebaran einen Sonnenbrand bekäme, wenn die dafür nötige Dauer durch Sonneneinstrahlung für einen durchschnittlichen Mitteleuropäer 20 Minuten beträgt (WHO 1997), und sich genannte Sterne an der Stelle der Sonne befänden. *Tipp:* Es genügt die Leuchtkraftverhältnisse der Sterne im UV Bereich zu vergleichen. Die gesamte Leuchtkraft eines Sterns, integriert über den *gesamten* Raum, ist wie folgt definiert:

$$L(T, R_\star) = 4\pi\, R_\star^2 \sigma\, T^4 \tag{13}$$

wobei $R_\star$ den Radius des Sterns bezeichnet. Richtig, dies ist nichts anderes als das Stefan-Boltzmann Gesetz integriert über die Oberfläche des Sterns, die ja als Ganzes strahlt. Da die Leuchtkraft $L(T, R_\star)$ der Gesamtstrahlungsleistung gleichkommt ist ihre SI-Einheit das Watt [W=J/s]. Möchte man die Leuchtkraft in einem Bestimmten Wellenlängenbereich angeben so lautet die zugehörige Relation... das dürfen Sie selbst herausfinden! Um vernünftige Ergebnisse mit MC zu erzielen sind mindestens $10^6 - 10^7$ Zufallszahlen-Ziehungen nötig!
Bonus Aufgaben (insg. 1 Tafelmeldung):

- Die Erde ist ja 1 AU von der Sonne entfernt! Wieso reicht es nur die UV-Leuchtkräfte zu vergleichen, ohne diesen Abstand mit einzuberechnen?
- Bestimmen Sie die Solarkonstanten (Leuchtkraft pro Quadratmeter) an der Stelle der Erde für alle drei Sterne!
- Bestimmen Sie die mittlere Temperatur der Erde, wenn die Erde als Schwarzkörper ohne Atmosphäre genähert wird.

4 Requirements

Ein Protokoll, kein Roman (!)

- das eine Einleitung zur Problemstellung enthält
- das *keinen* Quellcode beinhaltet; das Programm wird als Textdatei (namedesautors.c, namedesautors.f90) fehlerfrei compilierbar zusammen mit Namen und Matrikelnummer an *siegfried.eggl@univie.ac.at* geschickt.
- dessen zugrunde liegendes Programm *fehlerfrei compilierbar* sein muss
- dessen zugrunde liegendes Programm *fehlerfrei* compilierbar sein muss
- dessen zugrunde liegendes Programm fehlerfrei *compilierbar* sein muss, und zwar mit der Gnu Compiler Collection (gcc, gfortran, g++).
- das Ergebnisse präsentiert und analysiert

Das Protokoll kann als PDF ebenfalls an *siegfried.eggl@univie.ac.at* versendet werden. Keine MS-Word Dokumente als mail → ausgedruckt vorlegen!

5 References

W.H.O. International Agency for Research on Cancer: 'Solar and Ultraviolet Radiation' Report Vol 55, 1997
Fernie, J. D. , 'On the variability of Vega', Astronomical Society of the Pacific 93 (2): 333–337, Bibcode 1981PASP...93..333F, doi:10.1086/130834, 1981