Übungen aus den numerischen Methoden der Astronomie SS 2010
Programmierbeispiel I - der Simplex und das ZE3KP

1 Aufgabe

Ziel dieses Beispiels ist es, die Lagrange'schen Gleichgewichtspunkte L_4 und L_5 im planaren, zirkularen, eingeschränkten Drei-Körper-Problem (ZE3KP, englisch: Circular Restricted 3 Body Problem) mit Hilfe des Simplex Algorithmus ausfindig zu machen.

2 Einführung

Eines der großen Ziele der Astronomie seit jeher ist es, die Bahnen von Himmelskörpern vorhersagen zu können, sei es aus wissenschaftlicher Neugierde, oder aus purem Überlebenswillen (Asteroiden). Seit es Isaac Newton im 17 Jhdt. gelang die treibende Kraft für die Bewegung von (schweren) Himmelskörpern, die Gravitation, mathematisch zu erfassen, haben sich unzählige mit Mehrkörperproblemen beschäftigt, sprich mit dem Verhalten von Körpern, die sich gegenseitig gravitativ beeinflussen. Dabei zieht sich eine äußerst bemerkenswerte Tatsache wie ein roter Faden durch die Wissenschaftsgeschichte. Betrachtet man die gekoppelte Bewegung von mehr als zwei Körpern, so ist das korresponierende Differentialgleichungssystem nicht mehr geschlossen lösbar[1]. Das bedeutet, es gibt zwar Konfigurationen in denen analytische Lösungen gefunden werden (siehe z.B. Sitnikov Problem, Sundman's Theorem), aber diese können nicht für beliebige Anfangsbedingungen verallgemeinert werden. Eine sehr erfolgreiche Herangehensweise an solche Problemstellungen ist schlichtweg Simplifikation, also die Vereinfachung des Modells. Wenn der Prophet nicht zum Berg kommt...

[1] Mit zunehmender Anzahl an Freiheitsgraden des Systems und dem damit verbundenen Anstieg der Zahl der Differentialgleichungen, bleiben zu wenige Erhaltungssätze (Integrale der Bewegung) wie Drehimpulserhaltung, Erhaltung des linearen System-Impulses, etc. übrig um als Integrationskonstanten zu dienen.

3 Das planare, zirkulare, eingeschränkte Drei-Körper-Problem

Die (inertialen) nichtrelativistischen Bewegungsgleichungen für die gravitative Beschleunigung die n Körper auf einen Körper j mit dem Positionsvektor $\vec{\xi}(t)_j$ ausüben stellt sich wie folgt dar:

$$\ddot{\vec{\xi}}(t)_j = -k^2 \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{m_k(\xi(\vec{t})_k - \vec{\xi}(t)_j)}{\|\vec{\xi}(t)_k - \vec{\xi}(t)_j\|^3} \tag{1}$$

wobei k die Gauß'sche Gravitationskonstante darstellt, die im Gegensatz zu ihrem SI Pendant G für Astronomen recht annehmliche Einheiten verwendet: $k \simeq 0.01720209895 AU^{\frac{3}{2}} D^{-1} M_{\odot}^{-\frac{1}{2}}$. Für drei Körper ergeben sich aus der obigen Kurzschreibweise der Bewegungsgleichungen immerhin $3 \cdot 3 = 9$ gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Außerdem stehen auf der rechen Seite der Gleichungen Summen über alle Einflüsse der Körper aufeinander, also erster auf zweiten, erster auf dritten und zweiter auf dritten. Um diesen mathematischen Felsbrocken aufzuweichen bedient man sich, wie üblich, einiger Tricks.

Trick 1: Wir nehmen an, dass die Masse des $j$ten, in unserem Fall dritten Körpers im Vergleich zu den beiden Primärkörpern vernachlässigbar klein ist ($m_3 = 0$). Dies scheint zwar bei der Gleichung auf den 3ten Körper nicht sehr viel zu nützen, da m_3 ja gar nicht auftaucht, aber die rechten Seiten der Differentialgleichungen der beiden übrigen Körper bestehen nun nur noch aus jeweils einem Term.

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{\xi}}(t)_3 &= -k^2 \left(\frac{m_1(\vec{\xi}(t)_1 - \vec{\xi}(t)_3)}{\|\vec{\xi}(t)_1 - \vec{\xi}(t)_3\|^3} + \frac{m_2(\vec{\xi}(t)_2 - \vec{\xi}(t)_3)}{\|\vec{\xi}(t)_2 - \vec{\xi}(t)_3\|^3} \right) \\
\ddot{\vec{\xi}}(t)_1 &= -k^2 \frac{m_2(\vec{\xi}(t)_2 - \vec{\xi}(t)_1)}{\|\vec{\xi}(t)_2 - \vec{\xi}(t)_1\|^3} \\
\ddot{\vec{\xi}}(t)_2 &= -k^2 \frac{m_1(\vec{\xi}(t)_1 - \vec{\xi}(t)_2)}{\|\vec{\xi}(t)_1 - \vec{\xi}(t)_2\|^3}
\end{aligned} \tag{2}$$

Somit erhalten wir für die Gleichungen der Körper 1 und 2 das ungestörte Zwei-Körper-Problem, nur der dritte Körper wird von beiden beeinflusst. In dieser Ausführung wird das Drei-Körper-Problem mit dem Atribut *eingeschränkt* versehen.

Trick 2: Nehmen wir weiters an, dass die Bewegung der beiden Primärkörper um ihren gemeinsamen Schwerpunkt *kreisförmig* ist, sprich keiner der beiden Körper eine exzentrische Bahn besitzt, so ist deren Rotation gleichförmig. Bedenkt man, dass die Kräfte auf den dritten Körper von den Positionen der Primärkörper abhängig sind, sich diese jedoch ständig ändern, so ist es naheliegend sich in ein *mitbewegtes* Bezugssystem zu setzen, in dem ihre Position sozusagen fixiert wird. Die gleichförmige Bewegung der Körper 1 und 2 erleichtert dies, beide bewegen sich mit der gleichen(!) konstanten Winkelgeschwindigkeit n um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Die daraus folgende Transformation entspricht einer konstanten Rotation um die z-Achse:

$$\vec{\xi}(t) = \begin{pmatrix} cos(n \cdot t) & -sin(n \cdot t) & 0 \\ sin(n \cdot t) & cos(n \cdot t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t) \tag{3}$$

Die neuen Ortsvektoren im rotierenden Bezugssystem ($\vec{x}$) werden nun in die Bewegungsgleichungen eingesetzt (Siehe Kopien, Formeln (5.38)-(5.44)).

Der Haken dabei: auch wenn ein System mit konstanter Geschwindikgeit rotiert, ist es dennoch beschleunigt → "Auf Wiedersehen, Inertialsystem!" Als Konsequenz müssen wir davon ausgehen, dass unsere Bewegungsgleichungen ihre Form ändern. Davon abgesehen sollte aber die Transformation für die Einführung aller vorkommenden Scheinkräfte sorgen, sodaß wir uns darum nicht weiter zu kümmern brauchen.

Trick 17: Spätesten jetzt, besser noch zu Anfang, werden alle Konstanten eliminiert, sprich $k^2 = 1$ gesetzt. Die Massen m_1 und m_2 werden derart normiert, dass ihre Summe ebenfalls 1 ergibt. Somit kann der Massenparameter μ wie folgt eingeführt werden:

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \tag{4}$$

mit $\mu \leq 1/2$. Dies erleichtert auch die Positionierung der Primärkörper um den Schwerpunkt, der gleichzeitig den Mittelpunkt des mitrotierenden Koordinatensystems darstellt (siehe Kopie, Figure 5.3).

Trick 3: Da sich die Primärkörper in einer fixen Ebene bewegen (Erhaltung der Richtung des Gesamtdrehimpulses) können wir davon ausgehen, dass die interessanten Einflüsse auf Körper 3 in dieser Ebene stattfinden. Wir ignorieren daher alle Gleichungen für die z-Achse, und befinden uns im *planaren* Problem.

Trick 4: Nach erfolgreicher Transformation der Bewegungsgleichungen ins mitrotierende System können wir einen Blick auf die rechten Seiten werfen (siehe Kopie, Formeln (5.41)). Mit etwas Geschick finden wir eine "Zentrifugal-Potentialfunktion" U deren Ableitung nach den einzelnen Komponenten x, y unseres Ortsvektors $\vec{x}$ die rechten Seiten wiedergibt.

Betrachten wir die neuen Bewegungsgleichungen des masselosen Körpers 3 (siehe Kopie, Formeln (5.42) - (5.44)) müssen wir uns folgende Fragen stellen:

Sind die Differentialgleichungen nun tatsächlich einfacher geworden?

Wozu U?

Die Gleichungen (1) mögen zwar auf den ersten Blick harmloser aussehen, sie beinhalten jedoch in deren rechten Seiten die zeitabhängigen Positionen *aller* Körper. Im Gegensatz dazu sind die Positionen der Körper 1 und 2 im mitbewegten System fixiert, und der Körper 3 hat als masseloser Testpartikel keinen Einfluss auf die Potentialfunktion U. Somit ist U stationär, und wir können uns darauf beschränken die Bewegung von Körper 3 zu beobachten.

Nun könnte man sich damit begnügen, spezielle Lösungen der Differentialgleichungen für bestimmte Anfangsbedingungen anzugeben. Allerdings strebt man bei der Behandlung von Problemen meist nach Lösungen die für ein ganzes Set von Anfangsbedingungen gelten, oder Lösungen, die für alle Zeiten t gültig sind. Wir werden uns in der Folge mit letzteren beschäftigen.

4 Die Lagrange'schen Gleichgewichtspunkte

Die Lagrange'schen Gleichgewichtspunkte sind Regionen, in denen die gesamte Gravitationskraft zweier Körper genau die Flieh(schein)kräfte aufhebt, die auf einen dritten Körper wirken. Anders gesagt, befindet sich ein Teilchen in einem Lagrangepunkt, so ist es kräftefrei. Es wird also, sollte es keine Störungen von außen geben, für alle Zeiten dort verweilen. Im mitrotierenden Koordinatensystem werden die Lagrange'schen Gleichgewichtspunkte durch Minima der "Zentrifugal-Potentialfunktion" U repräsentiert (Warum?). Überraschend hierbei mag die Tatsache erscheinen, dass auch Lagrangepunkte auf der Bahn des weniger massiven Körpers existieren, die etwas voran- und etwas hinterherlaufen (L_4, L_5, siehe Kopie Seite 126). Die Position der kollinearen Punkte (L_1, L_2, L_3) erscheinen als Orte des Kräftegleichgewichts zwischen Fliehkraft und kollektiver Gravitationskraft relativ einleuchtend. (Welcher der Lagrangepunkte würde auch im nicht-rotierenden Zwei-Körper-Potential vorkommen?)

5 Aufgabe im Detail

Wie bereits im Übungsbeispiel 2 erwähnt, wird der Simplex-Algorithmus oft dazu benutzt, Minima von Funktionen zu bestimmen. Verwenden Sie nun das "Downhill Simplex Verfahren" um die Minima des "Zentrifugal-Potentials" U und somit die Lagrange'schen Gleichgewichtspunkte L_4 und L_5 im planaren, zirkularen, eingeschränkten Drei-Körper-Problem zu finden! Berechnen Sie die Position der Langrange'sche Gleichgewichtspunkte L_4 und L_5 für folgende Massenparameter: $\mu \in \{1/2, 1/27, 1/100\}$. Existiert ein Verhältnis zwischen den Positionen der beiden Primärkörper und denen der Lagrangepunkte L_4, L_5? Wie verhalten sich die Potentialwerte $U|_{x=L_4,L_5}$ bei sinkendem μ? Lassen sich daraus Schlüsse auf die Stabilität von L_4 und L_5 ziehen? Versuchen Sie auch die übrigen Lagrangepunkte zu finden, und interpretieren Sie Ihr Ergebnis!

6 Bonus

Versuchen Sie die Lagrangepunkte auch analytisch zu finden, z.B. indem Sie die Vektorfunktion $F = \nabla U$, also den Gradienten des Potentials U berechnen und dessen Komponenten gemäß üblicher Kurvendiskussionsverfahren nullsetzen. Versuchen sie dies zunächst mit $y = 0$ um die kollinearen Punkte L_1, L_2 und L_3 zu finden. Die Formel für F sollte Ihnen bis auf das fehlende Vorzeichen bekannt vorkommen, aber entspricht F hier tatsächlich der Kraft, die auf das Testteilchen wirkt? Wie können Sie sicher sein, dass es sich bei den gefundenen Punkten um ein Minimum von U handelt?

Für jeden gefundenen Lagrangepunkt (auch für verschiedene μ) gibt es einen zusätzlichen Punkt für das Beispiel!

7 Requirements

Ein Protokoll, kein Roman (!)

- das eine Einleitung zur Problemstellung enthält

- in dem alle im Text gestellten Fragen beantwortet werden
- das *keinen* Quellcode enthlält; das Programm wird als Textdatei (namedesautors1.c, namedesautors1.f90) fehlerfrei compilierbar zusammen mit Namen und Matrikelnummer an *siegfried.eggl@univie.ac.at* geschickt.
- das Ergebnisse präsentiert und analysiert

Das Protokoll kann als PDF ebenfalls an *siegfried.eggl@univie.ac.at* versendet werden. Keine MS-Word Dokumente als mail → ausgedruckt vorlegen!

8 References

Roy, A, E. : ORBITAL MOTION, Institute of Physics Publishing, pp. 127, 1988